

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**ПРОГРАММА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ДЛЯ КРУГЛОГОДИЧНЫХ ШКОЛ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО РОСТА**

Авторы программы:

Кытманов А.М. – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и фундаментальной информатики СФУ;
Лейнартас Е.К. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функции Института математики и фундаментальной информатики СФУ;
Черепанова О.Н. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики и фундаментальной информатики СФУ;
Сорокин Р.В. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики и фундаментальной информатики СФУ;
Шипина Т.Н. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики и фундаментальной информатики СФУ;
Кузоватов В.И. – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики и фундаментальной информатики СФУ;
Казакова О.А. – инженер по взаимодействию с муниципалитетами, учреждениями, управление профессиональной ориентации и координации довузовской подготовки СФУ.

Направление программы школы: физико-математическое

Название программы школы: «Занимательные вопросы и задачи математики»

Целевая группа: учащиеся 8 – 10 классов

Количество дней/часов: 5 дней / 32 часа

Пояснительная записка

Программа школы по физико-математическому направлению рассчитана на учащихся 8 – 10 классов, включает материалы, не получившие свое отражение в программах предметов общего образования. Программа направлена на формирование функциональной грамотности – умений воспринимать и анализировать информацию, представленную в различных формах, овладение опытом самостоятельной работы, способами учебно-исследовательской и учебно-практической деятельности, навыками и умениями решения олимпиадных задач по математике, задач С5 и С6 ЕГЭ по математике.

Цель программы: выявить потенциальные возможности одаренных детей и обеспечить возможность дальнейшего развития и углубления знаний по математике через организацию различных форм коллективного и индивидуального сопровождения.

Задачи программы:

- ознакомить школьников с классическими и современными научными представлениями в области математики;
- пробудить и развить устойчивый интерес учащихся к математике и её приложениям;
- расширить и углубить представления учащихся о культурно-исторической ценности математики, о роли ведущих ученых-математиков в развитии мировой науки;
- систематизировать, расширить и дополнить знания по предмету;
- профессионально сориентировать школьников в области математики для физико-математических и инженерных специальностей;
- развивать умения самостоятельной деятельности школьников: самостоятельный выбор способа решения учебных задач, самоконтроль и обоснованная оценка собственной деятельности и приобретенного опыта;
- формировать у школьников умения и способы деятельности по решению олимпиадных задач;
- создать условия для их успешной социализации, укрепление физического и психического здоровья одаренных детей;

Актуальность, педагогическая целесообразность программы.

Выявление, сопровождение и поддержка одаренных детей являются приоритетными направлениями деятельности системы образования. Организация круглогодичных школ интеллектуального роста является эффективным способом построения индивидуальной образовательной траектории одаренных детей, способствует приобретению ими навыков и умений самостоятельной работы, исследовательской, аналитической и проектной деятельности. В рамках реализации дополнительной образовательной программы физико-математического направления создаются условия для раскрытия и развития талантов детей, получение дополнительных знаний по математике, программа способствует

повышению интереса к изучению данного предмета и профессиональной ориентации на физико-математические и инженерно-физические специальности, обеспечивающих развитие производства, науки и создание новых технологий. Содержание программы включает материалы, не получившие свое отражение в общеобразовательной программе, включает лекционные и семинарские занятия, задачи и тесты, контрольные вопросы, позволяющие определить степень продвижения и сформировать рейтинг обучающихся.

Программа также содержит задачи, стимулирующие становление исследовательских навыков (задачи с формулировкой существующих нерешенных проблем современной математики, межпредметные задания, задачи с «избыточными» или «недостаточными» данными и др.).

Педагогические концепции, идеи, на основе которых разработана программа школы.

При составлении курса были использованы следующие научно-методические подходы: соответствие современным деятельностным формам и методам организации процесса обучения, ориентация на компетентностный подход и современные цели обучения, соответствие современным научным представлениям в области математики, соответствие возрастным и психологическим особенностям учащихся, обеспечение преемственности содержания образования, обеспечение межпредметных связей, обеспечение оптимизации учебного процесса, обеспечение возможностей использования разных форм обучения, включая лекции, семинары, проведение консультаций, исследовательской работы и т.п.

Программа дополняет традиционные общеобразовательные учебные программы по математике.

Планируемые результаты, образовательные эффекты.

В ходе освоения программы «Занимательные вопросы и задачи математики» учащиеся закрепят имеющиеся и получают новые знания о многих математических объектах, познакомятся с современным научным представлениям в области математики, приобретут навыки научно-исследовательской и проектной работами.

Учащиеся, освоившие курс, должны обладать **компетенциями**, включающими в себя способность:

- владеть способами учебно-исследовательской и учебно-проектной деятельности;
- обладать познавательной мотивацией, определяющей установку на продолжение образования;
- решать задачи повышенной сложности (в том числе олимпиадные), используя приобретенные предметные, интеллектуальные и общие знания;

- иметь навыки организации собственной деятельности, исходя из цели и способов ее достижения;
- самостоятельно осуществлять поиск информации, необходимой для эффективного выполнения поставленных задач;
- использовать информационно-коммуникационные технологии в проектной и исследовательской деятельности, а также для описания результатов деятельности;
- работать в команде, эффективно общаться с коллегами, педагогами.

Ожидаемым образовательным эффектом является развитие познавательного интереса одаренных детей в области математики, получение положительного опыта самостоятельной деятельности в избранной области и профессиональная ориентация для дальнейшего развития в выбранном направлении.

Позиционный состав педагогической команды:

- Кытманов А.М. – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и фундаментальной информатики СФУ (Высшее, специалист по специальности математика, математический факультет Красноярского государственного университета, 1971г.);
- Черепанова О.Н. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики и фундаментальной информатики СФУ (Высшее, специалист по специальности математика, математический факультет Красноярского государственного университета, 1991г.);
- Казакова О.А. – инженер по взаимодействию с муниципалитетами учреждениями управление профессиональной ориентации и координации довузовской подготовки СФУ (высшее, факультет математики и информатики КГПУ им. В.П. Астафьева, первая квалификационная категория).
- Зотов И.Н. – студент магистратуры II курса Института математики и фундаментальной информатики СФУ, преподаватель дополнительного образования МАОУ Лицей №9 «Лидер» г. Красноярск (высшее, бакалавр математики, Институт математики и фундаментальной информатики, 2012);

Коллектив исполнителей имеет большой профессиональный опыт преподавания не только в высших учебных заведениях, но постоянно участвует в работе со школьниками: реализация индивидуальных и коллективных образовательных программ со школьниками в общеобразовательных учреждениях и в ЗЕНШ, участие в работе жюри

всероссийской олимпиады школьников, участие в разработке олимпиадных заданий для муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников.

Роль в процессе проведения школы – лекторы, тьюторы учебных групп, руководители семинаров.

Перечень основных содержательных блоков.

Модуль школы включает в себя 5 тематических блоков:

1. Логические задачи.
2. Комбинаторика и элементы теории вероятностей.
3. Графы.
4. Математические примеры и конструкции.
5. Математическое понимание природы.

Для школьников, занявших первые 10 мест по итогам итогового рейтингования, предусмотрены рекомендательные письма для зачисления в ЗЕНШ, организация консультационного сопровождения преподавателями СФУ в дистанционной форме.

Основные формы и методы:

Каждая тема состоит из

- теоретической части,
- материалов для семинарских занятий,
- контрольно–измерительных материалов: контрольных вопросов и заданий для проверки результатов обучающихся,
- материалов для проведения математических игр и т.д.

Формы работы: чередование кратковременных (20-30 минут) общих лекций-бесед, практических работ в малых группах (до 10 человек в группе и 25-30 минут на одну работу) и общих семинаров, на которых школьники докладывают основные результаты своей работы, учебные занятия по решению задач, контрольные работы, тесты, математические игры, индивидуальные консультации, самостоятельная работа обучающихся.

Формы организации процесса обучения и применяемые методы обучения носят интерактивный характер и сочетаются с самостоятельной внеаудиторной учебной деятельностью учащихся. Содержание предметного учебного материала интегрировано с практико-ориентированными учебными задачами.

Режим занятий:

7.30. Подъем.

7.45 – 8.15. Утренняя зарядка.

8.30. Завтрак.

9.00 – 11.00. Учебные занятия.

11.15 – 12.45. Учебные занятия (игровые, соревновательные формы).

13.00 – 13.30. Обед.
 14.00 – 15.30 Учебные занятия.
 16.00. Полдник.
 16.30 – 17.30. Учебные занятия (игровые, соревновательные формы).
 18.00 – 19.00 Самостоятельная работа над проектами, консультации с преподавателями.
 19.00. Ужин.
 20.00 – 22.00. Культурно-массовые мероприятия, спортивные соревнования, спортивные секции.
 22.00 Отбой.

Перечень требований к условиям осуществления программы школы по аудиторному фонду и учебному оборудованию:

1. Зал для заключительной конференции, способный вместить всех учащихся школы (50 чел.) с проектором – 1 шт.
2. Лекционная аудитория (на 50 чел.) с проектором, интерактивной доской, с возможностью выхода в интернет – 1 шт.;
3. Аудитории для практических занятий (на 15–20 чел.) – 4 шт.

Формы и критерии оценки учащихся:

Предполагается рейтинговая оценка деятельности учащихся школы.

Баллы начисляются за все виды учебной деятельности учащегося школы интеллектуального роста:

1. Решение учебных задач на практических занятиях;
2. Контрольные задания по пройденному материалу за день;
3. Участие (с учетом полученных результатов) в олимпиаде по математике;
4. Участие (с учетом полученных результатов) в математических играх;
5. Выполнение учебно-исследовательского проекта (индивидуального или группового) и/или лабораторного научного исследования и их презентация на конференции.

Для школьников, занявших первые 10 мест по итогам итогового рейтингования, предусмотрены рекомендательные письма для зачисления в ЗЕНШ, организация консультационного сопровождения преподавателями СФУ в дистанционной форме.

Смета расходов.

Наименование расходов	Расчет	Итого (рублей)
Оплата труда	1 доктор* 4 дня*8 часов*569,87+27,1	23177,75

преподавателей	1 канд.*4 дня*8час *427,44+27,1% 2 препод.*4 дня*8час *284,93+27,1%	17384,84 23177,35
Транспортные расходы	625 руб. (средняя стоимость аренды автобуса в час) * 12 часов * 1 автобус	7500,0
Приобретение подарков	Подарки, блокноты, ручки с символикой школы – 50 чел.*400 руб.;	20000,0
Канцелярия		3000,0
Дистанционное сопровождение	1 доктор* 4 дня*8 часов*569,87+27,1	23177,75
Итого:		117417,69

Список литературы:

- 1) Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. – М.: МЦНМО, 2009.
- 2) А.Н. Андреева, А.И. Барабанов, И.Я. Чернявский. Саратовские математические олимпиады. 1950/51 – 1994/95. – М.: МЦНМО, 2013.
- 3) И.Л. Бабинская. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.
- 4) Э.Н. Балаян. 555 олимпиадных и занимательных задач по математике 5-11 классы. – Ростов н/Д: Феникс, 2010.
- 5) Э.Н. Балаян. Готовимся к олимпиадам по математике 7-8 классы. – Ростов н/Д: Феникс, 2012.
- 6) Э.Н. Балаян. Лучшие олимпиадные задачи по математике. 7-11 классы. – Ростов н/Д: Феникс, 2011.
- 7) А.Д. Блинков, Ю.А. Блинков. Геометрические задачи на построение. – М.: МЦНМО, 2012.
- 8) А.Д. Блинков. Классические средние в арифметике и геометрии. – М.: МЦНМО, 2012.
- 9) А.Д. Блинков, Е.С. Горская, В.М. Гуровиц. Московские математические регаты. – М.: МЦНМО, 2007.
- 10) О.Б. Богомолова. Логические задачи. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2005.
- 11) Е.А. Бунимович, В.А. Булычев. Вероятность и статистика. 5-9 классы. М.: Дрофа, 2002.
- 12) Ф.А. Бурюкин, О.В. Знаменская, Т.В. Крупкина и др. Дополнительное математическое образование. Для учащихся «Роснефть-классов» и «профильных классов». – Красноярск: Офсет, 2010.
- 13) С.В. Буфеев. Коллекция задач по арифметике целых чисел. Задания С6 ЕГЭ. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013.
- 14) Н.Я. Виленкин. Комбинаторика. М.: МЦНМО, 2007.
- 15) Г.И. Вольфсон. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра. – М.: МЦНМО, 2014.

- 16) Л.А. Гилева. Интерактивные игры по математике. Абака, олимпиады. – Красноярск, 2011.
- 17) Л.А. Гилева, И.Н. Герасимова. Интерактивные игры по математике. Командные соревнования. – Красноярск, 2012.
- 18) Л.А. Гилева, И.Н. Герасимова. Интерактивные игры по математике. Математическая карусель. – Красноярск, 2011.
- 19) Н.В. Горбачев. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2013.
- 20) В.М. Гуровиц, В.В. Ховрина. Графы. – М.: МЦНМО, 2012.
- 21) М. А. Екимов, Г. П. Кукин. Задачи на разрезание. – М.: МЦНМО, 2011.
- 22) И.Ж. Ибатулин. Математические олимпиады. Теория и практика. Основная школа. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.
- 23) А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи. Как решают нестандартные задачи. – М.: МЦНМО, 2010.
- 24) К.А. Кноп. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. – М.: МЦНМО, 2011.
- 25) С.С. Коробков. Элементы математической логики и теории вероятности. – Екатеринбург, 1999.
- 26) В.Ю. Лыскова, Е.А. Ракитина. Логика в информатике. – М.: Информатика и образование, 1999.
- 27) Л.Э. Медников. Четность. – М.: МЦНМО, 2011.
- 28) О.И. Мельников. Незнайка в стране графов. – М.: Либроком, 2012.
- 29) Г.А. Мерзон, И.В. Яценко. Длина, площадь, объем. – М.: МЦНМО, 2012.
- 30) В.В. Прасолов. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. – М.: МЦНМО, 2011.
- 31) А.И. Сгибнев. Делимость и простые числа. – М.: МЦНМО, 2012.
- 32) А.В. Фарков. Математические олимпиады. Муниципальный этап. 5-11 классы. – М.: Илекса, 2012.
- 33) П.В. Чулков. Арифметические задачи. – М.: МЦНМО, 2012.
- 34) А.В. Шаповалов. Как построить пример. – М.: МЦНМО, 2013.
- 35) Всероссийская олимпиада школьников по математике для школьников города Москвы – <http://olympiads.mccme.ru/>
- 36) Журнал для любознательных «Квантик» – <http://www.kvantik.com>.
- 37) Интернет-проект «Задачи» – <http://www.problems.ru>.
- 38) Информационная поддержка студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ по математике – <http://alexlarin.net>.
- 39) Информационный портал Всероссийской олимпиады школьников – <http://rosolymp.ru>.
- 40) Математические кружки на Малом мехмате МГУ – <http://www.mmmf.msu.ru>.
- 41) Научно-популярный физико-математический журнал «Квант» – <http://kvant.mccme.ru>.

Учебно-тематический план

№	Наименование	Базовые понятия	Формы деятельности	Количество часов	
				теория	практика
1. Логические задачи					
	Сюжетные логические задачи. Табличный метод решения логических задач.	Высказывания. Истина и ложь. Операции алгебры высказываний. Таблицы истинности. Рыцари, лжецы, хитрецы. Логические парадоксы.	Лекция- беседа. Семинарское занятие по решению задач. * Самостоятельная работа. Игра «Математическая дуэль».	2	4
2. Комбинаторика и элементы теории вероятностей					
	Основные правила комбинаторики. Три основных типа комбинаций.	Правила суммы и произведения. Размещения. Перестановки. Сочетания. Бином Ньютона. Классическое определение вероятности.	Лекция- беседа. Семинарское занятие по решению задач. * Самостоятельная работа. Игра «Математический хоккей».	2	4
3. Графы					
	Основные типы задач, при решении которых можно использовать графы.	Графы и подграфы. Степень вершины. Двудольные графы. Лемма о рукопожатиях. Путь. Цикл. Полный граф. Связный граф. Эйлеров граф. Обходы. Деревья.	Лекция- беседа. Семинарское занятие по решению задач* Самостоятельная работа. Игра «Математическая регата».	2	4
4. Математические примеры и конструкции					
	Построение математических примеров и конструкций.	Принцип Дирихле. Инвариант. Чётность. Раскраска. Математические игры. Симметрии. Сдвиги. Повороты.	Лекция- беседа. Семинарское занятие по решению задач.* Самостоятельная работа. Игра «Математическая абак».	2	4
5. Математическое понимание природы					
	Занимательные вопросы и задачи по математике об окружающем мире	Замечательные кривые. Криптография. Математическое моделирование. Невозможные фигуры. Иллюзии. Флексагоны. Золотое сечение. Фракталы.	Лекция- беседа. Семинарское занятие по решению задач.* Изготовление моделей. Самостоятельная работа. Итоговый тест.	2	5
	Профориентация		Лекция-беседа	1	

*Семинарские занятия проводятся отдельно для школьников и отдельно для сопровождающих учителей-предметников

Учебно-тематический план для дистанционного обучения

	Лекции	Практика	Форма/способ обучения
Современные достижения науки	8	4	On-line лекция, эссе
Решение олимпиадных задач		6	Тест, электронная почта
Научно-исследовательская работа	2	10	On-line консультация (темы будут выбраны во время очного этапа)
Защита работ on-line		2	Подведение итогов. Формирование списка для участия в форуме «Молодежь и наука»

Дистанционное обучение будет производиться с помощью сайта «<http://dovuz.sfu-kras.ru>» и программы Docent PRO

Рекламно-информационное описание программы дополнительного образования по физико-математическому направлению «Занимательные вопросы и задачи математики»

Программа дополнительного образования по физико-математическому направлению «Занимательные вопросы и задачи математики» разработана коллективом преподавателей Сибирского федерального университета, направлена на формирование познавательной активности учащихся 8-10 классов и включает в основном материалы, не получившие свое отражение в учебных программах предметов общего образования.

Цель программы: выявить потенциальные возможности одаренных детей и обеспечить возможность дальнейшего развития через организацию различных форм коллективного и индивидуального сопровождения.

В рамках реализации дополнительной образовательной программы физико-математического направления создаются условия для раскрытия и развития талантов детей, получение дополнительных знаний по математике, способствует повышению интереса к изучению предмета и профессиональной ориентации на физико-математические и инженерно-физические специальности, обеспечивающих развитие производства, науки и создание новых технологий.

В ходе реализации программы «Занимательные вопросы и задачи математики» учащиеся получают возможность прослушать лекции и получить консультации лучших преподавателей СФУ, узнают новые математические понятия, познакомятся с современным научным представлением в области математики, приобретут навыки научно-исследовательской и проектной работы.

Для школьников, занявших первые 10 мест по итогам итогового рейтингования, предусмотрены рекомендательные письма для зачисления в ЗЕНШ, организация консультационного сопровождения преподавателями СФУ в дистанционной форме. Программа реализуется в дни школьных каникул в межрайонных ресурсных центрах по работе с одаренными детьми.

Информация об организации-заявителе:

Фирменное наименование Участника:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Сибирский федеральный университет»
Организационно-правовая форма:	Некоммерческая организация
Адрес местонахождения юридического лица (юридический адрес):	660041, Российская Федерация, г. Красноярск, проспект Свободный, д. 79
Адрес для почтовых отправлений (фактический адрес):	660041, Россия, г. Красноярск, проспект Свободный, д. 79.
Банковские реквизиты:	Расчетный счет № 40503810802004000003 в СФ ОАО АКБ «Международный финансовый клуб» г. Красноярск БИК 040407592 к/с № 30101810100000000592
Контактная информация: Ректор СФУ: Куратор программы:	Ваганов Е.А., (391)244-82-13 Римацкая Н.В., (391) 206-21-59, shmanko_nadya@mail.ru

Семинар 1 по математике «Комбинаторика. Бином Ньютона.»

Цель занятия: Освоить понятие бинома Ньютона, а также свойства биномиальных коэффициентов. Научиться решать как типовые, так и нестандартные задачи комбинаторики, сводящиеся к использованию бинома Ньютона. Рассмотреть способ получения биномиальных коэффициентов через треугольник Паскаля.

Время: 1.5 часа.

Метод проведения занятия: Семинарское занятие с элементами индивидуальной работы учащихся.

План занятия:

1. Повторение теоретического материала данного на лекции - 20 минут.
 - Формула бинома Ньютона.
 - Свойства биномиальных коэффициентов.
 - Примеры решения типовых задач на данную тему, коллективное обсуждение различных методов.
2. Интерактивная работа - 60 минут.
 - Разделение учащихся на группы для дальнейшей практической работы.
 - Решение, а также коллективное обсуждение задач в учебных группах, диалог учащихся.
 - Индивидуальная работа преподавателей с каждой группой в отдельности. Анализ трудностей, возникших при решении задач.
 - Разбор нестандартных задач у доски с целью более детального понимания данной темы.
3. Закрепление материала - 10 минут.
 - Краткое повторение основных понятий и формул.
 - Выводы по занятию.
 - Задания на самостоятельную домашнюю работу.

Конспект занятия:

1. Теоретический материал по теме “Комбинаторика. Бином Ньютона”, решение типовых задач.

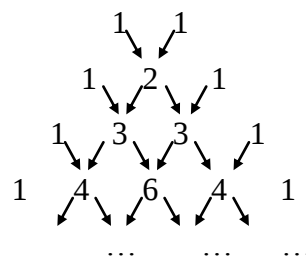
Понятие бинома Ньютона.

Биномом Ньютона называют разложение вида:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Данные коэффициенты называются *биномиальными коэффициентами*. Стоит отметить, что существует еще один способ получения биномиальных коэффициентов C_n^k . Их можно получить с помощью *треугольника Паскаля*.

Опишем алгоритм построения данного треугольника. Каждая строка треугольника соответствует конкретной n -ной степени многочлена, значения в строке соответствуют коэффициентам в разложении. Треугольник строится сверху вниз, т.е. от многочлена нулевой степени, каждый раз увеличивая степень на единицу. Стрелками показано, какие операции выполняются: соседние числа складываются и сносятся вниз.



Практическая значимость треугольника Паскаля заключается в том, что с его помощью можно восстанавливать не только известные формулы квадратов суммы и разности, но и формулы куба суммы и разности, четвертой степени, пятой и даже выше.

Пример. Найти разложение бинома Ньютона четвертой степени. Расчет биномиальных коэффициентов произвести как по формуле сочетаний, так и через треугольник Паскаля.

Пример. Доказать, что $C_n^0 = C_n^n = 1$. $C_n^1 = n$.

Свойства биномиальных коэффициентов. Примеры типовых задач.

Биномиальные коэффициенты обладают большим количеством свойств. Отметим самые основные из них, например, *правило симметрии*: биномиальные коэффициенты членов разложения, равноотстоящих от концов разложения, равны между собой: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Также стоит отметить *правило Паскаля*: $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$. Как видно из формулы, именно это правило делает возможным применение треугольника Паскаля для подсчета биномиальных коэффициентов.

Пример. Докажите, что сумма биномиальных коэффициентов при фиксированном n равна 2^n , то есть: $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

2. Примеры задач для работы учащихся в группах.

1. Встречается ли в треугольнике Паскаля число 2012?
2. Найдите коэффициент при x^4 в разложении $(1+x)^{10}$.
3. Докажите, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.
4. Докажите, что сумма чисел, стоящих в сто первой строке треугольника Паскаля в 2 раза больше суммы чисел, стоящих в сотой строке.
5. Найдите значение числа 11^4 , используя треугольник Паскаля.
6. Встречается ли в сотой строке треугольника Паскаля число $1 + 2 + \dots + 99$?

Семинар 2 по математике «Основные правила комбинаторики»

Тема занятия: Основные правила комбинаторики.

Цель занятия: Освоить базовые понятия комбинаторики, изучить правило суммы и правило произведения. Отработать практическое применение формул для подсчета числа перестановок, сочетаний и размещений.

Время: 1.5 часа.

Метод проведения занятия: Семинарское занятие с элементами индивидуальной работы учащихся.

План занятия:

1. Повторение теоретического материала данного на лекции - 20 минут.
 - Правило суммы и правило произведения.
 - Формула подсчета перестановок, сочетаний и размещений.
 - Демонстрация примеров применения данных формул. Решение комбинаторных задач.
2. Интерактивная работа - 60 минут.
 - Разделение учащихся на группы для дальнейшей практической работы.
 - Самостоятельное решение задач в учебных группах. Индивидуальная работа, обсуждение задач в группах, диалог учащихся.
 - Анализ и способы решения возникших трудностей при решении задач. Работа преподавателей с каждой группой в отдельности.
 - Разбор сложных задач у доски с целью более детального понимания применения методов для решения задач.
3. Закрепление материала - 10 минут.
 - Краткое повторение основных понятий, методов и формул.
 - Выводы по занятию.
 - Задания на самостоятельную домашнюю работу.

Конспект занятия:

1. Теоретический материал по теме “Основные правила комбинаторики”, демонстрация примеров.

Размещения без повторений.

Общая формулировка: Имеется бланк, в котором k мест. Все места вакантны. Их надо заполнить элементами. Имеется запас из n различных элементов, и на каждое место можно поставить один из этих элементов, но теперь каждый элемент в единственном числе, поэтому элементы не могут повторяться. Сколько существует способов заполнить такой бланк? Два способа считаются различными, если хотя бы на одном месте с них стоят разные элементы.

Каждый способ заполнения позволяет разместить на k местах некоторые из n элементов, причем элементы не могут повторяться, поэтому он называется *размещением без повторений*. Число всех таких размещений обозначают A_n^k .

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример. В правление избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

Пример. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюда и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает чашку, блюдо и ложку)?

Сочетания без повторений.

В тех случаях, когда нас не интересует порядок элементов в комбинации, а интересует лишь ее состав, говорят о сочетаниях. Сочетаниями из n элементов по k называют любой выбор k элементов из имеющихся различных n элементов.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Пример. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся пяти различных красок?

Пример. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами можно это сделать? А сколькими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете 100 + 200 + 400 + 800?

2. Примеры задач для работы учащихся в группах.

7. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание»? А из слова «корова»?
8. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?
9. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти цветов?
10. Сколько пятизначных чисел содержат все цифры 1, 2, 3, 4, 5? Сколько содержат все цифры 0, 2, 4, 6, 8?
11. Сколькими способами можно разбить 10 человек на две баскетбольные команды по 5 человек в каждой?
12. У абитуриента 9 различных книг. Он передал 3 книги товарищу. Сколькими способами он может это сделать?

Семинар 3 «Сюжетные логические задачи»

Цель занятия: Ввести понятие высказывания как предложения, о котором можно сказать, истинно оно или ложно. Привести примеры. Предложить учащимся назвать высказывания. Потренироваться в построении отрицаний высказываний, особенно со словами «каждый», «любой», «хотя бы один» и т.д. После этого перейти к объяснению методов решения логических задач. Остановиться можно на двух: с помощью применения таблиц и с помощью рассуждения.

Время: 1.5 часа.

Метод проведения: Семинарское занятие с элементами индивидуальной работы учащихся.

План занятия:

1. Повторение теоретического материала данного на лекции - 20 минут.
 - Понятие высказывания.
 - Примеры предложений, являющихся высказываниями.
 - Примеры предложений, не являющихся высказываниями.
 - Построение отрицаний высказываний.
 - Примеры решения типовых логических задач на данную тему, коллективное обсуждение методов.
2. Интерактивная работа - 60 минут.
 - Разделение учащихся на группы для дальнейшей практической работы.
 - Решение, а также коллективное обсуждение задач в учебных группах, диалог учащихся.
 - Индивидуальная работа преподавателей с каждой группой в отдельности. Анализ трудностей, возникших при решении задач.
 - Разбор нестандартных задач у доски с целью более детального понимания данной темы.
3. Закрепление материала - 10 минут.
 - Краткое повторение основных понятий и формул.
 - Выводы по занятию.
 - Задания на самостоятельную домашнюю работу.

Работа по теме занятия:

Одной из основных трудностей, которая возникает при решении логических задач, является поиск связей между отдельными фактами из условия задачи. Примером логической задачи может служить известная **загадка Эйнштейна**. В своей самой сложной редакции задача предполагает решение в уме, без использования каких-либо записей или средств сохранения информации. *Без этих ограничений головоломка заметно теряет в сложности*, поскольку может быть решена простым составлением таблицы с исключением заведомо противоречивых вариантов.

Самые простые таблицы используются при решении логических задач, в которых фигурируют только два типа информации, а каждое из утверждений в задаче является

истинным. Тогда на пересечении строки и столбца в соответствующей таблице ставится некоторый символ, часто «+» («–») или «галочка», который означает, что данной строке соответствует информация из данного столбца. Проиллюстрируем сказанное с помощью примера.

Пример. Александр, Борис, Виктор и Григорий – друзья. Один из них – врач, другой – журналист, третий – спортсмен и четвертый – строитель. Журналист написал статьи об Александре и Григории. Спортсмен и журналист вместе с Борисом ходили в поход. Александр и Борис были на приеме у врача. У кого какая профессия?

Решение. Рассмотрим решение задачи с помощью таблицы.

	Александр	Борис	Виктор	Григорий
Врач	–	–		
Журналист	–	–		–
Спортсмен		–		
Строитель				

Так как журналист написал статьи об Александре и Григории, то журналиста звали не Александр и не Григорий. Так как спортсмен и журналист ходили с Борисом в поход, то спортсмена и журналиста звали не Борисом. Из того, что Александр и Борис были у врача, следует, что они – не врачи. Поставив соответствующие минусы в клетках таблицы, получаем, что Борис – строитель.

	Александр	Борис	Виктор	Григорий
Врач	–	–		
Журналист	–	–		–
Спортсмен		–		
Строитель	–	+	–	–

Учитывая это, получаем, что Александр – спортсмен, Григорий – врач, а Виктор – журналист.

Ответ: Борис – строитель, Александр – спортсмен, Григорий – врач, Виктор – журналист.

Замечание. Хотелось бы обратить внимание на то, что таблицы в решении задачи носили только иллюстративный характер, позволяя не упускать из виду оставшиеся на тот момент фамилии и специальности.

Второй тип таблиц обычно используется при решении задач, в которых есть не меньше трех различных типов информации и все утверждения в задаче являются истинными. Необходимо помнить, что всякая таблица второго типа может быть заменена на две таблицы первого типа, и вообще, дело вкуса, сколько именно таблиц необходимо использовать для решения той или иной задачи. Хотя, конечно, хочется, чтобы решение было компактным и красивым.

И наконец, таблицы третьего типа связаны с задачами, в которых некоторые из утверждений могут быть ложными. Здесь, несомненно, важным является тот факт, что для того, чтобы доказать, что некоторое утверждение задачи истинно, необходимо доказать, что противоположное ему утверждение ложно. А это можно сделать, если удастся найти противоречие с условием задачи в предположении, что это противоположное утверждение истинно. Приведем пример.

Пример. Написав контрольную работу по математике, три гнома – Дори, Нори и Ори – сообщили своему знакомому хоббиту Бильбо Бэггинсу следующее:

Дори: «Я написал не на 5».

Нори: «На этот раз я написал на 5».

Ори: «Я написал не на 3».

После проверки работ выяснилось, что гномы получили разные положительные оценки и из трех приведенных высказываний только одно верное. Какую оценку получил за контрольную работу каждый из гномов?

Решение. Решение таких задач лучше начинать с тех мест, про которые есть больше всего информации. В данной задаче это оценка «5».

Рассмотрим несколько случаев.

Пусть оценку «5» получил Нори. Значит, два оставшихся утверждения ложны. То есть Ори написал на «3», Дори написал на «5».

	«3»	«4»	«5»
Дори	–	–	⊕
Нори	–	–	+
Ори	+	–	–

Но тогда два гнома написали на «5», что невозможно (по условию гномы получили разные отметки). И теперь мы точно знаем, что утверждение Нори ложно.

Если оценку «5» получил Ори, то его утверждение и утверждение Дори будут истинными, а это противоречит условию задачи, ведь из трех утверждений истинными может быть только одно.

Таким образом, мы теперь точно знаем, что на «5» написал Дори. Тогда утверждения Дори и Нори ложны, а утверждение Ори – истинно. Но Ори не мог написать на «5» и на «3». Значит, Ори написал на «4», а Нори написал на «3».

Ответ: Дори – оценку «5», Нори – оценку «3», Ори – оценку «4».

Пример. Петя, Вася, Коля и Миша играли в футбол. Один из них разбил мячом стекло. На вопрос «Кто это сделал?» Петя, Вася и Коля ответили: «Не я», а Миша – «Не знаю». Потом оказалось, что двое из них сказали правду, а двое – неправду. Знает ли Миша, кто разбил стекло? Ответ обоснуйте.

Решение. Начнем с ответов Пети, Васи и Коли. Так как стекло разбил кто-то один, то среди ответов Пети, Васи и Коли может быть лишь один ложный, иначе при двух ложных ответах получается, что стекло разбили двое.

Тогда вторым ложным ответом будет ответ Миши, так как всего ложных ответов два. Поэтому Миша знал, кто разбил стекло.

Пример. На острове живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник, приехавший на остров, нанял островитянина в проводники. Они пошли гулять и увидели другого островитянина. Путешественник послал проводника узнать, к какому племени принадлежит этот туземец. Проводник вернулся и сказал: «Туземец говорит, что он абориген». Кем был проводник: пришельцем или аборигеном?

Решение. Так как ответом встречного островитянина могла быть лишь фраза «Я – абориген» (этот ответ является правдой для аборигена и ложью для пришельцев), а проводник сказал, что туземец – абориген, то проводник является аборигеном.

Перечень примерных заданий:

- 1) Как перевезти в лодке с одного берега реки на другой волка, козла и капусту, если известно, что волка нельзя оставить без привязи с козлом, а козел равнодушен к капусте? В лодке только два места, поэтому можно с собой брать одновременно или одно животное, или капусту.
- 2) Беседуют трое: Белокуров, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из нас русский, другой – брюнет, а третий – рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос имеет каждый из беседующих?
- 3) Друзья Алёша, Боря и Витя учатся в одном классе. Один из них ездит домой из школы на автобусе, другой – на трамвае, а третий – на троллейбусе. Однажды после уроков Алёша пошел проводить своего друга до остановки автобуса. Когда мимо них проходил троллейбус, третий друг крикнул из окна: «Боря, ты забыл в школе тетрадку!» Кто на чем ездит домой?
- 4) В одном дворе живут четыре друга. Вадим и шофер старше Сергея; Николай и слесарь занимаются боксом; электрик – младший из друзей; по вечерам Антон и токарь играют в домино против Сергея и электрика. Определите профессию каждого из друзей.
- 5) В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода, причем вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?
- 6) Три друга – Владимир, Игорь и Сергей преподают математику, физику и литературу в школах Тулы, Рязани и Калуги. Владимир работает не в Рязани, Игорь – не в Туле, туляк преподаёт литературу, рязанец – не физику, Игорь – не математику. Какой предмет и в каком городе преподаёт каждый из них?
- 7) Марина, Лариса, Жанна и Катя умеют играть на разных инструментах (пианино, виолончели, гитаре, скрипке), но каждая на одном. Они же знают иностранные языки (английский, французский, немецкий, испанский), но каждая только один. Девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански. Лариса не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка. Марина не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает ни немецкого, ни английского языка. Девушка, которая говорит по-немецки, не играет на виолончели. Жанна знает французский язык, но не играет на скрипке. Кто на каком инструменте играет, и какой иностранный язык знает?
- 8) В районном городе живут пять друзей: Иванов, Петренко, Сидорчук, Гришин и Капустин. Профессии у них разные: один из них маляр, другой – мельник, третий – плотник, четвертый – почтальон, а пятый – парикмахер. Петренко и Гришин никогда не держали в руках малярной кисти. Иванов и Гришин собираются посетить мельницу, на которой работает их товарищ. Петренко и Капустин живут в одном доме с почтальоном. Сидорчук был недавно одним из свидетелей на свадьбе Петренко и дочери парикмахера. Иванов и Петренко каждое воскресенье играют в городки с плотником и маляром. Гришин и Капустин по субботам обязательно встречаются в парикмахерской, где работает их друг. Почтальон предпочитает бриться сам. Определите профессию каждого из друзей.
- 9) Мачеха, уезжая на бал, дала Золушке мешок, в котором были перемешаны мак и просо, и велела перебрать их. Когда Золушка уезжала на бал, она оставила три мешка: в одном было просо, в другом – мак, а в третьем – ещё не разобранный мешок. Чтобы не перепутать

мешки, Золушка к каждому из них прикрепил по табличке: «Мак», «Просо» и «Смесь». Мачеха вернулась с бала первой и нарочно поменяла местами все таблички так, чтобы на каждом мешке оказалась неправильная надпись. Ученик Феи успел предупредить Золушку, что теперь ни одна надпись на мешках не соответствует действительности. Тогда Золушка достала только одно-единственное зёрнышко из одного мешка и, посмотрев на него, сразу догадалась, где что лежит. Как она это сделала?

10) Четверо ребят – Алексей, Борис, Владимир и Григорий – участвовали в лыжных гонках. На следующий день на вопрос, кто какое место занял, они ответили так. Алексей: «Я не был ни первым и ни последним». Борис: «Я не был последним». Владимир: «Я был первым». Григорий: «Я был последним». Известно, что три из этих ответов были правильными, а один – ложью. Кто сказал правду? Кто был первым?

11) Коренными жителями острова являются рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Человек **A** говорит: «Я – лжец». Является ли он уроженцем острова рыцарей и лжецов?

12) Из четырех учеников – Антона, Бори, Васи и Гали – один отличник. Кто отличник, если:

а) в тройке «Антон, Боря, Вася» есть отличник;

б) в тройке «Антон, Вася, Галя» есть отличник;

в) Антон не отличник?

13) На острове два города, в одном живут рыцари, говорящие только правду, а в другом – лжецы. Встретились три человека **A**, **B** и **C**. **A** говорит: «**B** – лжец». **B** говорит: «**A** и **C** из одного города». Кто такой **C**?

14) В семье четверо детей. Им 5, 8, 13, 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера и Галя. Сколько лет каждому ребенку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и Веры делится на три?

15) В краже классного журнала из учительской подозревают четверых учащихся: Александра, Бориса, Виктора и Григория. При выяснении того, кто виноват в воровстве журнала, они сказали директору школы следующее. Александр: «Это сделал Борис». Борис: «Это сделал Григорий». Виктор: «Это сделал не я». Григорий: «Борис лжет, что это сделал я». Правду сказал только один. Кто совершил кражу?

16) **(Задача о Смите-Джонсоне-Робинсоне)** Смит, Джонсон и Робинсон работают в одной поездной бригаде машинистом, кондуктором и кочегаром. В поезде едут три пассажира с теми же фамилиями. (Пассажира будем называть «Мистер» (М-р).) М-р Робинсон живет в Лос-Анджелесе, кондуктор – в Омахе. М-р Джонсон давно позабыл всю алгебру, которой его учили в колледже. Однофамилец кондуктора живет в Чикаго. Кондуктор и один из пассажиров, известный специалист по математической физике, ходят в одну церковь. Смит всегда выигрывает у кочегара партии в бильярд. Как фамилия машиниста?

17) В доме живут **A**, его жена **B** и трое их детей **C**, **D**, **E**, при этом справедливы следующие утверждения:

1) Если **A** смотрит телевизор, то и **B** смотрит телевизор;

2) Хотя бы один из **D** и **E** смотрит телевизор;

3) Ровно один из **B** и **C** смотрит телевизор;

4) **C** и **D** либо оба смотрят, либо оба не смотрят телевизор;

5) Если **E** смотрит телевизор, то **A** и **D** тоже смотрят телевизор.

Кто смотрит и кто не смотрит телевизор?

18) В некоторой стране есть два города. В одном из них живут только люди, которые всегда говорят правду, в другом - только те, кто всегда лжет. Все они ходят друг к другу в гости, т.е. в любом из этих двух городов можно встретить как честного человека, так и лжеца. Предположим, вы оказались в одном из этих городов. Как, задав один-единственный вопрос первому встречному, определить, в какой город вы попали - в город честных или в город лжецов?

19) Перед вами две двери. За одной вас ждет счастье, за другой — смерть. Вы не знаете, за какой дверью что находится. Перед каждой дверью стоит стражник. Один из них всегда лжет, второй всегда говорит правду. Неизвестно, кто из них лжец, а кто правдив. Вы можете задать одному стражнику только один вопрос. Что вы должны спросить?

20) Вы имеете 3 конверта, один из которых нужно немедленно съесть. В каждом конверте содержится листок с двумя утверждениями. В одном конверте оба утверждения истинны, в другом оба ложны, а в третьем одно ложно и одно истинно.

Конверт 1. 1) Этот конверт есть не надо. 2) Обязательно нужно съесть второй конверт.

Конверт 2. 1) Не нужно есть первый конверт. 2) Ешьте третий конверт.

Конверт 3. 1) Не стоит есть этот конверт. 2) Смело съедайте первый конверт.

Так какой конверт нужно съесть?

Семинар 4 «Введение в теорию графов»

Цель занятия: Дать учащимся представление о графах, показать на примерах, в каких типах задач они используются, и продемонстрировать, как правильно записать решение с их помощью.

Время: 1.5 часа.

Метод проведения: Семинарское занятие с элементами индивидуальной работы учащихся.

План занятия:

1. Повторение теоретического материала данного на лекции – 20 минут.
 - Понятие графа, степени вершины графа.
 - Примеры решения задач на изображение описанной в условии ситуации в виде графа и вывода на основании рисунка, на подсчёт ребер.
 - Коллективное обсуждение использования в задачах «леммы о рукопожатиях».
2. Интерактивная работа – 60 минут.
 - Разделение учащихся на группы для дальнейшей практической работы.
 - Решение, а также коллективное обсуждение задач в учебных группах, диалог учащихся.
 - Индивидуальная работа преподавателей с каждой группой в отдельности. Анализ трудностей, возникших при решении задач.
 - Разбор нестандартных задач у доски с целью более детального понимания данной темы.
3. Закрепление материала – 10 минут.
 - Краткое повторение основных понятий и формул.
 - Выводы по занятию.
 - Задания на самостоятельную домашнюю работу.

Работа по теме занятия:

1) Изображения графов и степень вершины

Пример. В деревне 9 домов. Известно, что у Петра соседи Иван и Антон, Максим сосед Ивану и Сергею, Виктор – Диме и Никите, Евгений – сосед Никиты, а больше соседей в этой деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Пётр огородами пробраться к Никите за яблоками?

Решение. Нарисуем схему: точками обозначим дома и соединим непересекающимися между собой линиями только те из них, которые являются соседними (см. рис. 1). Теперь видно, что пробраться огородами из дома Петра к дому Никиты нельзя.

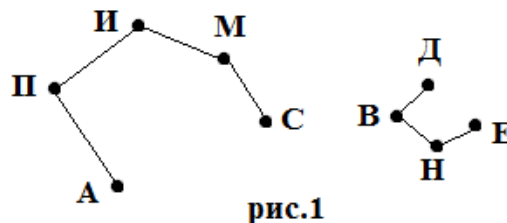


рис.1

Ответ: нет, не может.

Основная идея, которую нужно продемонстрировать при обсуждении данной задачи: рисунок помогает решению.

Пример. В трех вершинах пятиугольника расположили по фишке (см. рис 2а). Разрешается двигать их по диагонали в свободную вершину. Можно ли такими действиями добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами (см. рис. 2б)?

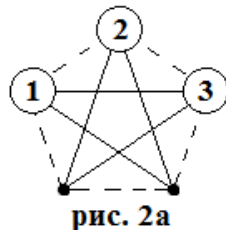


рис. 2а

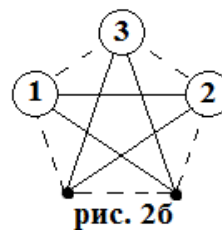


рис. 2б

Решение: Заметим, что диагонали пятиугольника образуют один замкнутый *цикл*. Представим себе, что фишки – это пуговицы, нанизанные на нитку (см. рис. 2в). Ясно, что если двигать пуговицы по нитке, то поменять местами две пуговицы нельзя. Поэтому переставить фишки требуемым образом невозможно.

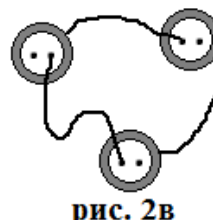


рис. 2в

Ответ: нет, нельзя.

Этот пример показывает ту же идею: изобразить ситуацию из условия задачи на рисунке, но демонстрирует более изощренные рассуждения.

Определение. *Графом* называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями. Точки называются *вершинами* графа, а соединяющие линии – *ребрами*.

Примерами графов могут служить: любая карта дорог, схема метро, электросхема, чертёж прямоугольника и т.д.

Здесь стоит нарисовать несколько примеров графов, обратить внимание на то, что граф может быть несвязным (состоять из нескольких «частей»), которые называют компонентами связности, и даже могут присутствовать вершины, из которых не исходит ни одного ребра (изолированные вершины).

Как правило, графы, у которых вершина соединена ребром сама с собой и графы, в которых пара вершин соединена несколькими ребрами, не рассматриваются, хотя иногда такие графы также бывают нужны.

Полезно представить граф как набор пуговиц, некоторые из которых соединены нитями. При этом, где именно расположены пуговицы, и как проходят нити – не важно: граф от этого не меняется, важно лишь то, какие пары пуговиц (вершины) соединены нитями (см. рис. 3а, б).

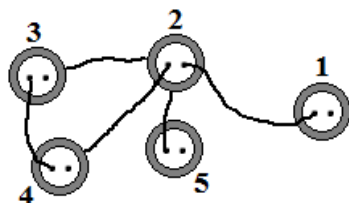


рис. 3а

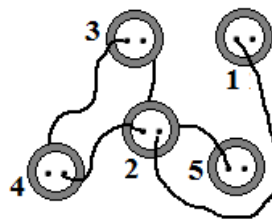


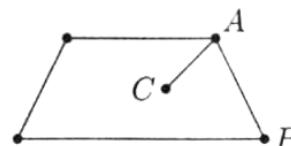
рис. 3б

Определение. *Степенью* (или *порядком*) вершины называется количество рёбер, исходящих из этой вершины. Вершина называется *чётной*, если из неё выходит чётное число рёбер, и *нечётной*, если из неё выходит нечётное число рёбер.

Так, например, в графе, изображенном на рисунке справа, вершина *A* имеет степень 3, вершина *B* – степень 2, вершина *C* – степень 1.

2) *Двудольные графы. Лемма о рукопожатиях*

Определение. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы рёбра соединяли только пары вершин разного цвета.



Например, квадрат является примером двудольного графа: его вершины можно покрасить в два цвета через одну. А вот как ни крась вершины пятиугольника, обязательно найдутся две соседние вершины одного цвета.

Пример. На 8 марта каждый из 10 мальчиков класса подарил по цветку 8 одноклассницам. Известно, что каждая девочка получила по 5 цветков. Сколько всего девочек в классе?

Решение: Подсчитаем количество «рёбер»: каждый из 10 мальчиков подарил по 8 цветков, поэтому всего было подарено 80 цветков. Поскольку каждая девочка получила по 5 цветков, то всего было 16 девочек.

Ответ: 16.

Теорема о числе рёбер двудольного графа.

а) Если в двудольном графе n белых вершин, и все они имеют степень S , то всего в графе nS рёбер.

б) Число рёбер равно сумме степеней всех белых вершин (а также равно сумме степеней всех чёрных вершин).

Докажем следующую **теорему** (её часто называют леммой о рукопожатиях).

Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству рёбер.

Доказательство. Подсчитаем количество концов всех рёбер. Оно равно сумме степеней всех вершин (см. рис). Поскольку у каждого ребра два конца, то количество рёбер вдвое меньше, чем количество их концов.

Название этой теоремы произошло от такой задачи.

В компании некоторые люди пожали руки друг другу. Докажите, что количество людей, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

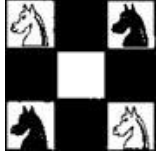
Лемма о рукопожатиях остается верной, даже если мы разрешаем рёбра, соединяющие вершину с самой собой, или рёбра, соединяющие уже соединенные ребром вершины. Да ведь и пара знакомых совершает обычно много рукопожатий!

Этот результат является основной идеей при решении многих задач.

Следствие. *Число нечётных вершин графа всегда чётно.*

Доказательство. Сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству рёбер, то есть должна быть четной. Следовательно, в ней должно быть четное число нечетных слагаемых.

Перечень примерных заданий:

- 1) Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?
- 2) В 20-этажном доме испорчен лифт: он может либо подниматься на 8 этажей вверх, либо спускаться на 13 этажей вниз. Можно ли с помощью лифта попасть с 20 этажа на первый? (Когда сверху меньше 8 этажей, то лифт вверх не пойдёт. Аналогично – вниз.)
- 3) Четыре шахматных коня – два черных и два белых – расположены в угловых клетках доски 3×3 , как показано на рисунке. Кони могут передвигаться на свободные клетки по обычным правилам. Можно ли сделать так, чтобы в верхних углах стояли белые кони, а в нижних – черные?
- 4) Можно ли на клетчатой бумаге закрасить 15 клеток так, чтобы у каждой из них было а) четное; б) нечетное число покрашенных соседей? (Клетки называются соседями, если они имеют общую сторону.)
- 5) Можно ли выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы сумма любых двух рядом стоящих цифр делилась либо на 5, либо на 7, либо на 13?
- 6) а) В фирме 50 компьютеров, некоторые пары компьютеров должны быть соединены кабелями. От каждого компьютера должно отходить по 8 кабелей. Сколько всего понадобится кабелей?
б) В графе 40 вершин, каждая степени 7. Сколько ребер в графе?
- 7) На концерте каждую песню исполняли двое артистов, и никакая пара не выступала вместе более одного раза. Всего было 12 артистов, каждый выступил по 5 раз. Сколько было песен?
- 7) В стране 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно добраться в любой другой (возможно, проезжая через другие города).
- 8) На дискотеке каждый мальчик танцевал ровно с десятью девочками, а каждая девочка — ровно с девятью мальчиками. Кого было больше: мальчиков или девочек?
- 9) Можно ли 2013 телефонов соединить между собой так, чтобы каждый был соединен с 2011 телефонами?
- 10) В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?
- 11) Нарисуйте двудольный граф, где чёрные и белые вершины – это соответственно чёрные и белые клетки доски 3×3 , а рёбра соответствуют возможным ходам коня.
- 12) На окружности отмечены несколько синих и красных точек. Каждая синяя точка соединена отрезками с тремя красными точками, а каждая красная – с пятью синими. Докажите, что число отрезков кратно 15. Найдите число красных точек, если всего отмечено 120 точек.
- 13) Каждый граф можно превратить в двудольный, покрасив все его вершины в белый цвет и добавив черную вершину в середину каждого ребра. Сколько вершин каждого цвета и сколько ребер у полученного графа, если у исходного было v вершин и r ребер?
- 14) В классе 20 человек. На праздник каждый мальчик подарил каждой девочке по цветку.
а) Какое наибольшее число цветков могло быть подарено?
б) Тот же вопрос, если в классе 21 человек.

- 15) На плоскости проведено n прямых. Каждая пересекается ровно с 77 другими. Найдите n (укажите все возможные варианты).
- 16) Назовём человека нелюдимым, если у него не более 5 знакомых. Назовем человека чудаком, если все его знакомые – нелюдимые. Докажите, что чудаков не больше, чем нелюдимых.
- 17) Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
- 18) Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там, на заколдованном озере имеются 7 островов, с каждого из которых ведет 1, 3 или 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?
- 19) Докажите, что связный граф, в котором степень каждой вершины чётна, при удалении любого ребра остается связным.
- 20) Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

Семинар 5 «Основные правила комбинаторики»

Цель занятия: Освоить базовые понятия комбинаторики, изучить правило суммы и правило произведения. Отработать практическое применение формул для подсчета числа перестановок, сочетаний и размещений без повторений.

Время: 1.5 часа.

Метод проведения: Семинарское занятие с элементами индивидуальной работы учащихся.

План занятия:

1. Повторение теоретического материала данного на лекции – 20 минут.
 - Правило суммы и правило произведения.
 - Формула подсчета перестановок, сочетаний и размещений.
 - Демонстрация примеров применения данных формул. Решение комбинаторных задач.
2. Интерактивная работа – 60 минут.
 - Разделение учащихся на группы для дальнейшей практической работы.
 - Самостоятельное решение задач в учебных группах. Индивидуальная работа, обсуждение задач в группах, диалог учащихся.
 - Анализ и способы решения возникших трудностей при решении задач. Работа преподавателей с каждой группой в отдельности.
 - Разбор сложных задач у доски с целью более детального понимания применения методов для решения задач.
3. Закрепление материала – 10 минут.
 - Краткое повторение основных понятий, методов и формул.
 - Выводы по занятию.
 - Задания на самостоятельную домашнюю работу.

Работа по теме занятия:

1. Правило суммы

Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а другой объект B можно выбрать n способами, при условии, что одновременный выбор A и B невозможен, то выбор « A или B » можно осуществить $m + n$ способами.

Пример. У абитуриента в руках два портфеля. В левом портфеле 4 разные книги по алгебре, а в правом 5 разных по геометрии. Сколькими способами он может достать одну книгу? (Ответ: 9)

2. Правило произведения

Если объект A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то выбор « A и B » в указанном порядке может быть осуществлен $m \cdot n$ способами.

Пример. На ферме есть 20 овец и 24 свиньи (все разной упитанности). Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну свинью? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз? (Ответ: 480; 437)

Пример. Сколько букв, содержащих по пяти букв каждое, можно составить из 33 букв, если допускаются повторения, но никакие две соседние буквы не должны совпадать, т.е. такие слова, как «пресс» или «ссора», не допускаются? (Ответ: $33 \cdot 32^4 = 34603008$);

3. Размещения без повторений

Общая формулировка: Имеется бланк, в котором k мест. Все места вакантны. Их надо заполнить элементами. Имеется запас из n различных элементов, и на каждое место можно поставить один из этих элементов, но теперь каждый элемент в единственном числе, поэтому элементы не могут повторяться. Сколько существует способов заполнить такой бланк? Два способа считаются различными, если хотя бы на одном месте с них стоят разные элементы.

Каждый способ заполнения позволяет разместить на k местах некоторые из n элементов, причем элементы не могут повторяться, поэтому он называется размещением без повторений. Число всех таких размещений обозначают A_n^k .

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример. В правление избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать? (Ответ: $A_9^3 = 504$)

Пример. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдца и 6 чайных ложек (все чашки, блюда и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает чашку, блюдо и ложку)? (Ответ: $A_4^3 \cdot A_5^3 \cdot A_6^3 = 172800$)

4. Перестановки без повторений

При составлении размещений без повторений из n элементов по k при $k < n$ мы получали размещения, которые могли отличаться и составом элементов, и порядком их расположения. Но если брать размещения, в которые входят все n элементов, то они могут отличаться друг от друга лишь порядком входящих в них элементов. Такие размещения из n элементов по n называются перестановками из n элементов $P_n = A_n^n = n!$

Пример. У абитуриента в левом портфеле 4 книги по алгебре, а в правом 5 по геометрии. Он достал книги (все книги разные) из портфелей и сложил их стопкой на столе. Сколькими способами он может составить стопку? (Ответ: $P_9 = 9! = 362880$)

5. Сочетания без повторений

В тех случаях, когда нас не интересует порядок элементов в комбинации, а интересует лишь ее состав, говорят о сочетаниях. Сочетаниями из n элементов по k называют любой выбор k элементов из имеющихся различных n элементов.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Пример. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся пяти различных красок? (Ответ: $C_5^3 = 10$)

Пример. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами можно это сделать? А сколькими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете 100 + 200 + 400 + 800? (Ответ: $C_{30}^4 = 27405$; $A_{30}^4 = 657720$)

Перечень примерных заданий:

- 1) Абитуриент может подъехать к университету либо на такси, либо на четырех автобусных маршрутах - №12, №32, №88, №90, либо на троллейбусном маршруте №15. Сколькими способами может подъехать к университету абитуриент?
- 2) При формировании экипажа космического корабля имеется 10 претендентов на пост командира экипажа, 20 – на пост бортинженера и 25 – на пост космонавта-исследователя. Ни один кандидат не претендует одновременно на два поста. Сколькими способами можно выбрать одного кандидата – командира, бортинженера или космонавта-исследователя – для проведения первого теста?
- 3) Имеется 5 билетов в театр, 6 билетов на балет и 10 билетов в кино. Сколькими способами можно выбрать один билет на балет или в кино?
- 4) Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «ЗДАНИЕ»? А из слова «КОРОВА»?
- 5) Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?
- 6) В розыгрыше первенства по футболу принимают участие **16** команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали, если любая команда может получить только одну медаль?
- 7) По решению деканата трех студентов из группы в 12 человек надо отправить на обучение. Одного студента в Германию, одного в Италию и одного в США. Сколькими способами можно это сделать?
- 8) На дискотеку пришло 12 девушек и 15 юношей. Объявлен «белый» танец. Все девушки выбрали для танцев юношей (и никто из них не отказался). Сколько могло образоваться танцующих пар?
- 9) Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти цветов?
- 10) Сколькими способами можно разложить 8 различных писем по восьми различным конвертам, если в каждый конверт кладется только одно письмо?
- 11) Сколько пятизначных чисел содержат все цифры 1, 2, 3, 4, 5? Сколько содержат все цифры 0, 2, 4, 6, 8?
- 12) Сколько различных слов (пусть и не имеющих смысла) можно получить путем перестановки букв в слове «ДУБЛЕНКА»?
- 13) На званый вечер приглашены 5 мужчин и 5 женщин. Напротив каждого места на стол необходимо поставить табличку с именем того, кто будет на этом месте сидеть, но никакие два лица одного пола не должны сидеть рядом. Сколькими способами можно расставить таблички?
- 14) У абитуриента 9 различных книг. Он передал 3 книги товарищу. Сколькими способами он может это сделать?
- 15) По решению деканата трех студентов из группы в 12 человек надо отправить в Германию на обучение. Сколькими способами это можно сделать?
- 16) Сколькими способами можно разбить 10 человек на две баскетбольные команды по 5 человек в каждой?
- 17) В некотором государстве каждые два человека отличаются набором зубов. Каково максимально возможное число жителей этого государства, если наибольшее число зубов у человека равно 32?

- 18) Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт есть хотя бы один туз? Ровно 1 туз? Не менее двух тузов? Ровно два туза?
- 19) Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых?
- 20) Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?